



TUGAS AKHIR - SM 141501

SIMULASI PERPINDAHAN PANAS PADA LAPISAN TENGAH PELAT MENGGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA

VIMALA RACHMAWATI
NRP 1211 100 090

Dosen Pembimbing
Drs. Kamiran, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - SM 141501

SIMULATION OF HEAT TRANSFER IN THE MID LAYER OF THE PLATES USING FINITE ELEMENT METHOD

VIMALA RACHMAWATI
NRP 1211 100 090

Supervisor
Drs. Kamiran, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

SIMULASI PERPINDAHAN PANAS PADA LAPISAN TENGAH PELAT MENGGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA

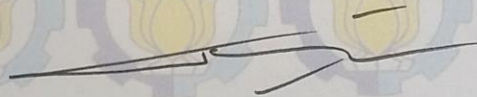
SIMULATION OF HEAT TRANSFER IN THE MID LAYER OF THE PLATES USING FINITE ELEMENT METHOD

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

VIMALA RACHMAWATI
NRP. 1211 100 090

Menyetujui,
Dosen Pembimbing



Drs. Kamiran, M.Si
NIP. 19630623 198903 1 001



Mengetahui,
Dosen Pembimbing
ITS
Dr. Erni Apriliani, M.Si.
NIP. 19660414 199102 2 001
Surabaya, Juli 2015

SIMULASI PERPINDAHAN PANAS PADA LAPISAN TENGAH PELAT MENGGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA

Nama : Vimala Rachmawati
NRP : 1211 100 090
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Drs. Kamiran, M.Si.

ABSTRAK

Perpindahan panas (heat transfer) adalah energi yang berpindah karena adanya perbedaan suhu, dimana prosesnya terjadi secara konduksi, konveksi dan radiasi. Fenomena ini memunculkan model matematika perpindahan panas yang merupakan persamaan diferensial parsial dan dapat diselesaikan secara numerik. Banyak penelitian muncul yang membahas masalah perpindahan panas dengan berbagai macam medium dan solusi numerik yang digunakan. Metode yang digunakan untuk penyelesaian masalah numerik ini diantaranya adalah metode beda hingga, metode volume hingga dan metode elemen hingga. Pada tugas akhir ini dibahas bagaimana simulasi perpindahan panas pada lapisan tengah pelat dimana model matematikanya dikembangkan dari penelitian sebelumnya. Model matematika ini diselesaikan dengan metode elemen hingga dengan fungsi bentuk segiempat linier. Selanjutnya persamaan perpindahan panas diselesaikan dengan metode residual dan formulasi galerkin sehingga hasil akhirnya dapat disimulasikan menggunakan software MATLAB untuk mengetahui laju perpindahan panas pada lapisan tengah pelat. Dari hasil simulasi diperoleh kesimpulan bahwa banyaknya elemen yang digunakan berpengaruh pada perhitungan numerik distribusi

suhu pada pelat. Selain itu, banyaknya elemen juga berpengaruh pada kontur pelat dan waktu yang dibutuhkan saat simulasi.

Kata kunci : Metode Elemen Hingga, Pelat, Perpindahan Panas.

SIMULATION OF HEAT TRANSFER IN THE MID LAYER OF THE PLATES USING FINITE ELEMENT METHOD

***Name of Student : Vimala Rachwawati
NRP : 1211 100 090
Department : Mathematics
Supervisor : Drs. Kamiran, M.Si.***

ABSTRACT

Heat transfer is energy that moves because of the temperature difference, where the process occurs by conduction, convection and radiation. This phenomenon raises a mathematical model of heat transfer which is a partial differential equation and can be solved numerically. Many surveyed appears that discusses problems with a variety of heat transfer medium and numerical solutions are used. The method used for the settlement of this numerical problems which are finite difference method, finite volume method and finite element method. In this final project is discussed how the simulation of heat transfer in the mid layer of the plate where the mathematical models developed from previous studies. This mathematical model is solved by finite element method with a linear function of rectangular shape. Furthermore, heat transfer equations solved by the residual method and Galerkin formulation so that the end result can be simulated using MATLAB software to determine the heat transfer rate on the mid layer plate. From the simulation results can be concluded that the number of elements used in the calculation of numerical effect on the temperature distribution of the plate. In addition, the number of elements also affects the contour of the plate and the time required when the simulation.

Keyword : Finite Element Method, Heat Transfer, Plate.

“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“SIMULASI PERPINDAHAN PANAS PADA LAPISAN TENGAH PELAT MENGGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA”

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Dr. Machmud Yunus, M.Si selaku Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Drs. Kamiran, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
4. Dr. Hariyanto, M.Si, Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Drs. Lukman Hanafi, M.Si, dan Drs. Daryono Budi U, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran demi perbaikan Tugas Akhir.

5. Dr. Chairul Imron, MI.Komp selaku Koordinator Tugas Akhir.
6. Seluruh jajaran dosen dan staf jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

special thanks to

Selama proses mengerjakan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis. Penulis sungguh ingin mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada :

- Kedua orang tua, Abah Sutrisno dan Umi' Khusnul Khotimah tercinta yang senantiasa dengan ikhlas memberikan kasih sayang, semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti bagi penulis.
- Saudara kandung, Ardi, Ilham dan Guntur yang selalu memberi support kepada penulis.
- *My Sweet Heart* Ervin dan Khoy yang sudah meluangkan banyak waktu menjadi sahabat terbaik.
- *Smurfs*, Dina, Ani, Ael dan Ence yang selalu memberikan dukungan dan motivasi meskipun ada jarak yang memisahkan. We Are Best Friend Forever ☺
- *Happy Girls*, Eni dan Nana yang senantiasa menemani dalam susah maupun senang. Thank you girls. I Love You ☺
- Dyna, Oink, Farah, Agus, Musa, Virama, Bundo, Habib, Wiwid, dan teman-teman angkatan 2011, terima kasih atas semangat, bantuan serta doanya. Sukses buat kita semua. Aamiin ☺
- Seluruh keluarga besar HIMATIKA ITS terima kasih atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian Tugas Akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang lebih baik bagi semua pihak yang telah membantu penulis. *Aamiin ya rabbal 'alamin.*

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir	3
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Perpindahan Panas	5
2.2 Persamaan Difusi Panas	6
2.3 Metode Elemen Hingga	10
2.4 Konsep Dasar Metode Elemen Hingga	11
2.4.1 Diskritisasi Domain	11
2.4.2 Penentuan Bentuk Fungsi Aproksimasi	12
2.4.3 Penentuan Sistem Koordinat	12
2.4.4 Perhitungan Properti Elemen	13
2.4.5 Pembentukan Sistem Persamaan Linier	13
2.4.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier	14
2.4.4 <i>Post Process</i> Hasil	14
BAB III. METODOLOGI	
3.1 Tahapan Penelitian	15
3.2 Diagram Alir Metode Penelitian	16

BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN	
4.1 Model <i>Governing Equation</i>	20
4.2 Diskritisasi Domain	21
4.3 Fungsi Bentuk Aproksimasi.....	23
4.4 Perhitungan Properti Elemen.....	25
4.5 Pembentukan Sistem Persamaan Linier.....	29
4.6 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier.....	31
4.6.1 Menghitung Matrik Kekakuan Kapasitansi	32
4.6.2 Menghitung Matrik Kekakuan Konduksi.....	35
4.6.3 Menghitung Matrik Kekakuan Konveksi	41
4.7 <i>Post Process</i> Hasil.....	46
4.8 Simulasi dan Analisis	46
BAB V. PENUTUP	
5.1 Kesimpulan	59
5.2 Saran.....	59
DAFTAR PUSTAKA	61
LAMPIRAN	63
BIODATA PENULIS	75

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Diferensial Kontrol Volume, dx, dy, dz , untuk analisis konduksi pada koordinat kartesian	7
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian	17
Gambar 4.1 Dimensi pelat	19
Gambar 4.2 Pelat yang dibagi menjadi 3 lapisan	19
Gambar 4.3 Skema kondisi batas pada sisi depan pelat	20
Gambar 4.4 Skema kondisi batas pada permukaan pelat	20
Gambar 4.5 Sisi depan pelat yang didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 <i>node</i>	21
Gambar 4.6 Permukaan pelat yang didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 <i>node</i>	21
Gambar 4.7 Permukaan pelat yang didiskritisasikan menjadi 32 elemen dengan 45 <i>node</i>	22
Gambar 4.8 Permukaan pelat yang didiskritisasikan menjadi 64 elemen dengan 81 <i>node</i>	22
Gambar 4.9 Parameter untuk elemen segiempat	23
Gambar 4.10 Grafik Distribusi Suhu saat $t = 10\text{ s}$	48
Gambar 4.11 Grafik Distribusi Suhu saat $t = 37\text{ s}$	48
Gambar 4.12 Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1\text{ s}$	55
Gambar 4.13 (a) Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600\text{ s}$ (16 elemen)	56
(b) Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600\text{ s}$ (32 elemen)	56
(c) Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600\text{ s}$ (64 elemen)	56

Gambar 4.14 (a) Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat
saat $t = 1.800\text{ s}$ (16 elemen) 56

(b) Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat
saat $t = 1.800\text{ s}$ (32 elemen) 56

(c) Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat
saat $t = 1.800\text{ s}$ (64 elemen) 57

DAFTAR SIMBOL

ρ	Massa jenis (kg/m^3)
C	Kapasitas panas ($J/kg.K$)
k	Konduktivitas panas ($W/m.K$)
h	Koefisien perpindahan panas konveksi (W/m^2K)
T	Suhu permukaan bahan ($^{\circ}C$)
T_{∞}	Suhu fluida sekitar ($^{\circ}C$)
t	Waktu (detik)
Q	Perubahan energi yang masuk
q	<i>Flux</i> / laju perpindahan panas konduksi (W/m^2)
A	Luas penampang (m^2)
$\alpha_1, \dots, \alpha_4$	Koefisien dari fungsi interpolasi
$[N]$	Fungsi bentuk elemen
$[K_G]$	Matrik kekakuan kapasitansi global
$[K_G^{(e)}]$	Matrik kekakuan kapasitansi tiap elemen
$[K]$	Matrik kekakuan global
$[K_D]$	Matrik kekakuan konduksi global
$[K_D^{(e)}]$	Matrik kekakuan konduksi tiap elemen
$[K_M]$	Matrik kekakuan konveksi global
$[K_M^{(e)}]$	Matrik kekakuan konveksi tiap elemen
$\{f\}$	Vektor kekakuan global
$\{f_Q\}, \{f_q\}$	Vektor kekakuan konduksi global
$\{f_Q^{(e)}\}, \{f_q^{(e)}\}$	Vektor kekakuan konduksi tiap elemen
$\{f_h\}$	Vektor kekakuan konveksi global
$\{f_h^{(e)}\}$	Vektor kekakuan konveksi tiap elemen
L_{ij}	Panjang pada sisi i - j
L_{km}	Panjang pada sisi k - m
L_{jk}	Panjang pada sisi j - k
L_{im}	Panjang pada sisi i - m

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
LAMPIRAN A Tabel Distribusi Suhu pada Sisi	
Depan Pelat saat $t = 10$ s.....	63
LAMPIRAN B Tabel Distribusi Suhu pada Sisi	
Depan Pelat saat $t = 37$ s.....	64
LAMPIRAN C Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 1$ s (16 Elemen 27 Node) ...	65
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 1$ s (32 Elemen 45 Node) ...	66
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 1$ s (64 Elemen 81 Node) ...	67
LAMPIRAN D Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 600$ s (16 Elemen 27 Node)	68
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 600$ s (32 Elemen 45 Node)	69
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 600$ s (64 Elemen 81 Node)	70
LAMPIRAN E Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan	
Pelat saat $t = 1.800$ s (16 Elemen	
27 Node)	71

Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1.800\text{ s}$ (32 Elemen 45 <i>Node</i>)	72
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1.800\text{ s}$ (64 Elemen 81 <i>Node</i>)	73

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik Tugas Akhir. Kemudian dirumuskan menjadi permasalahan yang akan diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Perpindahan panas adalah energi yang berpindah dikarenakan adanya perbedaan suhu[1]. Proses perpindahan panas terjadi secara konduksi, konveksi dan radiasi. Fenomena ini memunculkan model matematika dari perpindahan panas yang merupakan persamaan diferensial parsial sehingga dibutuhkan sebuah solusi agar diketahui sifat dan karakteristik dari laju perpindahan panas. Penelitian tentang perpindahan panas sudah dilakukan dan dikembangkan dengan beberapa metode numerik, seperti metode beda hingga, metode volume hingga dan metode elemen hingga yang dilakukan dengan bantuan komputasi komputer.

Metode elemen hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada permasalahan ilmu rekayasa dan matematika fisik seperti perpindahan panas, analisis struktur, aliran fluida, transportasi massa dan potensial elektromagnetik. Proses dari metode elemen hingga adalah membagi masalah yang kompleks menjadi elemen-elemen agar lebih mudah mendapatkan solusi. Solusi dari tiap elemen kemudian digabungkan sehingga menjadi solusi masalah secara keseluruhan[2].

Salah satu contoh penelitian yang membahas masalah perpindahan panas dengan penyelesaian persamaan secara numerik adalah penelitian yang dilakukan oleh Jeffers. Penelitiannya menjelaskan tentang elemen perpindahan panas yang disajikan untuk menangkap reaksi termal pada *shell* dan

pelat tiga dimensi yang diselesaikan secara numerik dengan metode elemen hingga. Persamaan pembangunnya didiskritisasikan menjadi serangkaian lapisan dua dimensi yang dihubungkan dengan perhitungan beda hingga dan menggunakan fungsi bentuk elemen segiempat kuadrat dengan 9 *node*. Formulasinya digunakan untuk menunjukkan akurasi dan efisiensi dari bidang suhu yang diprediksi pada *shell* yang dipanaskan tak seragam dengan beban komputasi yang ringan[3].

Berdasarkan penelitian tersebut, Tugas Akhir ini membahas tentang simulasi perpindahan panas pada lapisan tengah pelat. Persamaan panas yang digunakan diselesaikan secara numerik menggunakan metode elemen hingga dengan fungsi bentuk elemen segiempat linier yang memiliki 4 *node*. Hasilnya akan disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang diselesaikan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana penyelesaian numerik dari persamaan perpindahan panas pada lapisan tengah pelat menggunakan metode elemen hingga?
2. Bagaimana simulasi model perpindahan panas pada lapisan tengah pelat menggunakan *software* MATLAB?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Perpindahan panas yang diamati merupakan lapisan tengah dari pelat yang dibagi menjadi 3 lapisan (*layer*).
2. Pelat yang dikaji adalah pelat baja datar berbentuk segiempat.

3. Penyelesaian numerik menggunakan metode elemen hingga.
4. Perpindahan panas pada pelat disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Menyelesaikan secara numerik persamaan perpindahan panas pada lapisan tengah pelat menggunakan metode elemen hingga.
2. Mensimulasikan model perpindahan panas pada lapisan tengah pelat menggunakan *software* MATLAB.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan.
2. Memahami aplikasi numerik pada masalah perpindahan panas menggunakan metode elemen hingga.
3. Sebagai literatur penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN
Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan tentang dasar teori yang mendukung penelitian, antara lain tentang perpindahan panas, metode elemen hingga dan konsep dasar metode elemen hingga.

3. BAB III METODOLOGI

Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara detail mengenai model *governing equation* dari perpindahan panas, diskritisasi domain, fungsi bentuk aproksimasi, perhitungan properti elemen, pembentukan sistem persamaan linier, penyelesaian sistem persamaan linier, penyelesaian numerik dan simulasi.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini dibahas mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Dasar teori yang dijelaskan dibagi menjadi beberapa subbab yaitu Perpindahan Panas, Persamaan Difusi Panas, Metode Elemen Hingga dan Konsep Dasar Metode Elemen Hingga.

2.1 Perpindahan Panas

Perpindahan panas merupakan perpindahan energi dari daerah satu ke daerah lainnya akibat adanya perbedaan suhu baik dalam satu medium maupun antar medium. Perpindahan panas terjadi dengan tiga cara, yaitu : konduksi (hantaran), konveksi (aliran) dan radiasi (pancaran).

Pada Tugas Akhir ini dikaji suatu permasalahan yang berkaitan dengan konduksi dan konveksi saja.

a. Konduksi (hantaran)

Konduksi adalah proses perpindahan panas yang terjadi dimana panas mengalir dari benda bersuhu tinggi ke benda bersuhu rendah pada medium tetap. Persamaan umum dari laju perpindahan panas secara konduksi menurut Hukum Fourier dinyatakan[1]

$$q = -kA \frac{dT}{dx}$$

dengan

q : laju perpindahan panas konduksi (W/m^2)

A : luas penampang (m^2)

$\frac{dT}{dx}$: gradien suhu ($^{\circ}C/m$)

k : konduktivitas panas ($W/m.K$)

b. Konveksi

Konveksi adalah proses perpindahan panas yang terjadi antara permukaan benda padat dan fluida (cair atau gas) yang

bergerak disekelilingnya, yang merupakan gabungan antara pergerakan makroskopik dan molekular fluida. Persamaan umum dari laju perpindahan panas secara konveksi yang dikenal dengan Hukum Newton untuk pendinginan dinyatakan[1]

$$Q_{conv} = hA(T_{\infty} - T)$$

dengan

- Q_{conv} : laju perpindahan panas konveksi (W/m^2)
- h : koefisien perpindahan panas konveksi (W/m^2K)
- A : luas penampang (m^2)
- T_{∞} : suhu fluida sekitar ($^{\circ}C$)
- T : suhu permukaan bahan ($^{\circ}C$)

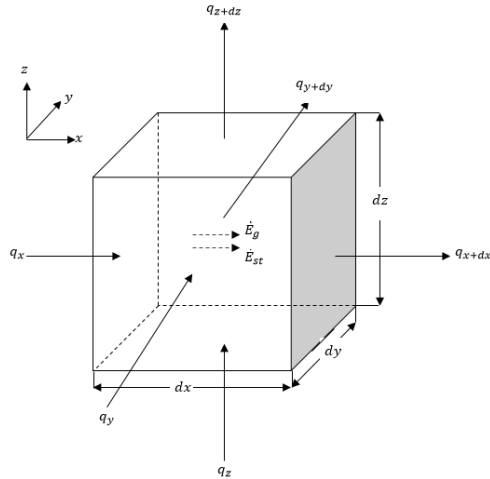
2.2 Persamaan Difusi Panas

Tujuan utama dari analisis konduksi adalah menentukan daerah suhu pada suatu medium yang dihasilkan dari batasan-batasan yang dikenai panas. Distribusi suhu yang dihasilkan digunakan untuk mengetahui tegangan panas pada benda padat. Selain itu, digunakan untuk mengoptimasi ketebalan dari material yang dibatasi atau untuk mengetahui kesesuaian dari bahan perekat yang digunakan pada material[1].

Diferensial kontrol volume didefinisikan untuk mengidentifikasi proses perpindahan panas yang relevan dan memperkenalkan persamaan laju perpindahan panas yang tepat. Hasilnya adalah persamaan diferensial yang digunakan untuk menentukan kondisi batas serta menyajikan distribusi suhu pada medium.

Sebuah media homogen dimana ada gradien suhu dan distribusi suhu $T(x,y,z)$ dinyatakan dalam koordinat kartesian. Dengan menerapkan konservasi energi, didefinisikan (diferensial) kontrol volume, dx, dy, dz , seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1. Selanjutnya adalah mempertimbangkan proses energi yang relevan dengan kontrol volume. Jika ada gradien suhu, konduksi perpindahan panas akan terjadi di setiap permukaan kontrol. Laju panas konduksi tegak lurus untuk setiap permukaan kontrol pada

lokasi koordinat x, y, z yang masing-masing ditunjukkan oleh istilah qx, qy, qz .



Gambar 2.1[1], Diferensial Kontrol Volume, dx, dy, dz , untuk analisis konduksi pada koordinat kartesian

Laju konduksi panas pada permukaan yang berlawanan dapat dinyatakan sebagai ekspansi deret Taylor, yaitu

$$\begin{cases} q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\ q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\ q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \end{cases} \quad (2.1)$$

Dengan kata lain, persamaan (2.1) hanya menyatakan bahwa komponen x dari laju perpindahan panas pada $x + dx$ sama dengan nilai dari komponen pada x ditambah jumlahan dari perubahan terhadap x kali dx .

Dalam medium ada istilah sumber energi yang berkaitan dengan laju pembangkit energi panas yang dinyatakan sebagai

$$\dot{E}_g = \dot{q} \, dx \, dy \, dz \quad (2.2)$$

dimana \dot{q} adalah laju energi yang dihasilkan per satuan volume dari medium (W/m^3). Selain itu, terjadi perubahan jumlah energi panas internal yang disimpan oleh material dalam kontrol volume. Energi yang tersimpan dinyatakan sebagai

$$\dot{E}_{st} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (2.3)$$

dimana $\rho C \frac{\partial T}{\partial t}$ adalah laju perubahan terhadap waktu dari energi (panas) internal dari medium per satuan volume.

Istilah \dot{E}_g dan \dot{E}_{st} merupakan proses fisik yang berbeda. \dot{E}_g adalah suku energi pembangkit yang merupakan manifestasi dari beberapa proses konversi energi yang melibatkan energi panas di satu sisi dan di sisi lain seperti kimia, energi listrik atau nuklir. Istilah positif (sumber) jika energi panas adalah yang menghasilkan dalam materi dengan mengeluarkan beberapa bentuk energi lain; negatif jika energi panas sedang digunakan. Sedangkan \dot{E}_{st} adalah suku penyimpanan energi yang mengacu pada laju perubahan energi internal yang disimpan oleh bahan.

Selanjutnya mengekspresikan konservasi energi menggunakan persamaan tingkat atas. Bentuk umum dari konservasi kebutuhan energi adalah

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (2.4)$$

Diketahui bahwa laju konduksi merupakan energi masuk (\dot{E}_{in}) dan energi keluar (\dot{E}_{out}). Substitusi Persamaan (2.2) dan (2.3) ke Persamaan (2.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 q_x + q_y + q_z + \dot{q} \, dx \, dy \, dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} \\
 = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substitusi dari Persamaan (2.1), dapat dikatakan bahwa

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} \, dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} \, dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} \, dz + \dot{q} \, dx \, dy \, dz = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \tag{2.6}$$

Laju konduksi panas dapat dievaluasi dari hukum Fourier yaitu

$$\begin{cases} q_x = -k \, dy \, dz \, \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = -k \, dx \, dz \, \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z = -k \, dx \, dy \, \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \tag{2.7}$$

Substitusi Persamaan (2.7) ke Persamaan (2.6), diperoleh persamaan 3 dimensi kontrol volume ($dx \, dy \, dz$) yaitu

$$\frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.8}$$

persamaan (2.8) merupakan bentuk umum dari persamaan difusi panas pada koordinat kartesian. Persamaan ini sering kali ditunjuk sebagai persamaan panas sebagai pembuktian dasar untuk analisis konduksi panas. Dari solusi tersebut, diperoleh distribusi suhu $T(x, y, z)$ sebagai fungsi waktu. Persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai berikut

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.9}$$

2.3 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan teknik dan masalah matematis dari suatu gejala fisis. Tipe masalah teknis dan matematis fisis yang dapat diselesaikan dengan metode elemen hingga terbagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok masalah analisis struktur dan kelompok masalah analisis non struktur[5].

Tipe-tipe permasalahan struktur meliputi :

- a. Analisa tegangan/*stress*, meliputi analisa *truss* dan *frame* serta masalah-masalah yang berhubungan dengan tegangan-tegangan yang terkonsentrasi.
- b. *Buckling* (*displacement* dari ujung vertikal yang bagian bawahnya diklaim pada ujung tetap).
- c. Analisis getaran.

Tipe permasalahan non struktur meliputi :

- a. Perpindahan panas dan massa.
- b. Mekanika fluida, termasuk aliran fluida lewat media proses.
- c. Distribusi dari potensial listrik dan potensial magnet.

Dalam persoalan-persoalan yang menyangkut geometri yang rumit, seperti persoalan pembebanan terhadap struktur yang kompleks, pada umumnya sulit dipecahkan secara analisis. Hal ini disebabkan karena cara analisis memerlukan besaran atau harga yang harus diketahui.

Formulasi dari metode elemen hingga dapat digunakan untuk mengatasi masalah ini. Metode ini menggunakan pendekatan terhadap harga-harga yang tidak diketahui pada setiap titik secara diskrit. Dimulai dengan pemodelan dari suatu benda dengan membagi dalam bagian yang kecil yang secara keseluruhan masih memiliki sifat yang sama dengan benda yang utuh sebelum terbagi dalam bagian yang kecil (diskritisasi).

2.4 Konsep Dasar Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga didasarkan pada suatu konsep dimana fungsi kontinu (seperti suhu, tekanan dan lain sebagainya) didekati dengan suatu model diskrit yang terdiri dari satu set *piecewise continuous function*. Masing-masing *piecewise function* didefinisikan untuk suatu sub domain yang disebut *finite element* (elemen hingga).

Konsep dasar dari metode elemen hingga berlaku untuk masalah dua atau tiga dimensi. Elemen dua dimensi merupakan fungsi x dan y yang pada umumnya berbentuk segitiga atau segiempat. Elemen ini dapat berbentuk bidang datar maupun bidang lengkung.

Bila suatu kontinum terbagi menjadi beberapa bagian yang lebih kecil maka bagian kecil ini disebut elemen hingga. Dinamakan elemen hingga karena ukuran elemen kecil ini berhingga dan pada umumnya memiliki bentuk geometri yang lebih sederhana dibandingkan dengan kontinumnya. Dengan menggunakan elemen hingga, suatu masalah yang memiliki jumlah derajat kebebasan tidak berhingga dapat diubah menjadi suatu masalah dengan jumlah derajat kebebasan tertentu sehingga proses pemecahannya akan lebih sederhana.

Secara umum langkah-langkah yang dilakukan dalam menggunakan metode elemen hingga disajikan dalam subbab-subbab berikut ini[2] :

2.4.1 Diskritisasi Domain

Diskritisasi adalah proses membagi benda dalam bagian kecil secara keseluruhan dan masih memiliki sifat yang sama dengan benda yang utuh sebelum terbagi dalam bagian yang kecil. Bagian kecil ini memiliki bentuk geometri yang lebih sederhana yang disebut elemen.

Banyaknya potongan yang dibentuk bergantung pada geometri dari benda yang dianalisa. Sedangkan bentuk elemen yang diambil bergantung pada dimensinya.

Untuk masalah satu dimensi, elemen yang digunakan adalah elemen garis. Untuk masalah dua dimensi, elemen yang digunakan pada umumnya yaitu elemen segitiga atau elemen segiempat. Elemen-elemen ini bisa berupa elemen linier maupun non linier. Untuk masalah tiga dimensi, elemen yang digunakan adalah elemen tetrahedral dan heksahedral.

2.4.2 Penentuan Bentuk Fungsi Aproksimasi

Jenis-jenis fungsi yang sering digunakan adalah fungsi linier, fungsi kuadratik, fungsi kubik atau fungsi polinomial. Fungsi interpolasi yang digunakan bergantung pada jenis elemen yang ditetapkan.

Jika yang digunakan adalah elemen segiempat dengan empat titik nodal, fungsi interpolasinya adalah fungsi linier atau polinomial derajat satu. Jika elemen segiempat dengan sembilan titik nodal, fungsi interpolasinya adalah fungsi kuadratik atau polinomial derajat dua.

2.4.3 Penentuan Sistem Koordinat

Sistem koordinat digunakan untuk menentukan letak suatu titik/*node* dalam suatu *space*. Dalam metode elemen hingga sering dipakai istilah atau sebutan koordinat lokal, koordinat global dan koordinat natural.

a. Sistem Kooordinat Lokal

Sistem koordinat yang dibuat dalam suatu elemen, dipakai untuk menentukan letak titik pada elemen tersebut. Pada umumnya salah satu ujung elemen tersebut dipakai sebagai titik asal (0,0). Setiap elemen mempunyai sistem kooordinat yang berlaku hanya untuk dirinya sendiri (lokal).

b. Sistem Koordinat Global

Sistem koordinat yang dibuat untuk menetapkan letak titik-titik pada seluruh domain, tidak hanya

untuk titik-titik pada satu elemen saja. *Node-node* dari semua elemen yang dibuat ditentukan secara global melalui satu sistem koordinat global.

c. Sistem Koordinat Natural

Sistem koordinat yang dipakai untuk menetapkan letak suatu titik dalam elemen, berdasarkan perbandingan panjang, luas atau volume yang terbentuk oleh titik tersebut dengan panjang atau luas atau volume dari seluruh elemen.

Ada dua keuntungan yang diperoleh dalam menggunakan sistem koordinat natural, yaitu :

1. Koordinat suatu titik yang dinyatakan dalam koordinat natural, tidak bergantung pada ukuran panjang sisi-sisi suatu elemen.
2. Perhitungan integral garis, integral luas dan integral volume dapat dilakukan dengan mudah.

2.4.4 Perhitungan Properti Elemen

Fungsi interpolasi yang telah ditentukan kemudian disubstitusi kembali pada persamaan-persamaan diferensial dan diproses guna mendapatkan sistem persamaan linier atau sistem matriks yang merupakan properti dari elemen terkait.

Ada beberapa cara yang digunakan untuk mendapatkan persamaan linier tersebut, antara lain pendekatan langsung (*direct*), pendekatan variasional, pendekatan residu berbobot (*weighted residue*) dan pendekatan keseimbangan energi.

2.4.5 Pembentukan Sistem Persamaan Linier

Matriks-matriks elemen yang terbentuk kemudian digabungkan menjadi matriks global. Ukuran matriks elemen adalah jumlah *node* per elemen dikalikan jumlah *degree of freedom (dof)* setiap *node*. Jadi untuk elemen segiempat dengan 4 *node* dan 1 *dof*, ukuran dari matriks elemennya adalah 4×4 .

Sedangkan ukuran matriks global adalah hasil dari $(n+1) \times (n+1)$ elemen. Sehingga untuk 64 elemen dengan pembagian 8×8 maka ukuran matriks globalnya adalah $(8+1) \times (8+1) = 81$. Matriks global ini disusun dari matriks lokal dimana *node-node* yang sama maka nilainya akan dijumlahkan.

2.4.6 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Sistem global yang terbentuk pada tahap sebelumnya dapat berupa sistem persamaan linier atau sistem persamaan non linier. Jika sistem yang terbentuk berupa sistem persamaan linier, teknik-teknik umum untuk menyelesaikan sistem dapat digunakan.

2.4.7 Post Process Hasil

Setelah solusi diperoleh pada tahap sebelumnya, hasil dapat ditampilkan berupa grafik kontur atau plot. Jika ada parameter lain yang bergantung pada hasil maka parameter ini akan dihitung setelah hasil diperoleh.

BAB III METODOLOGI

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahapan Penelitian

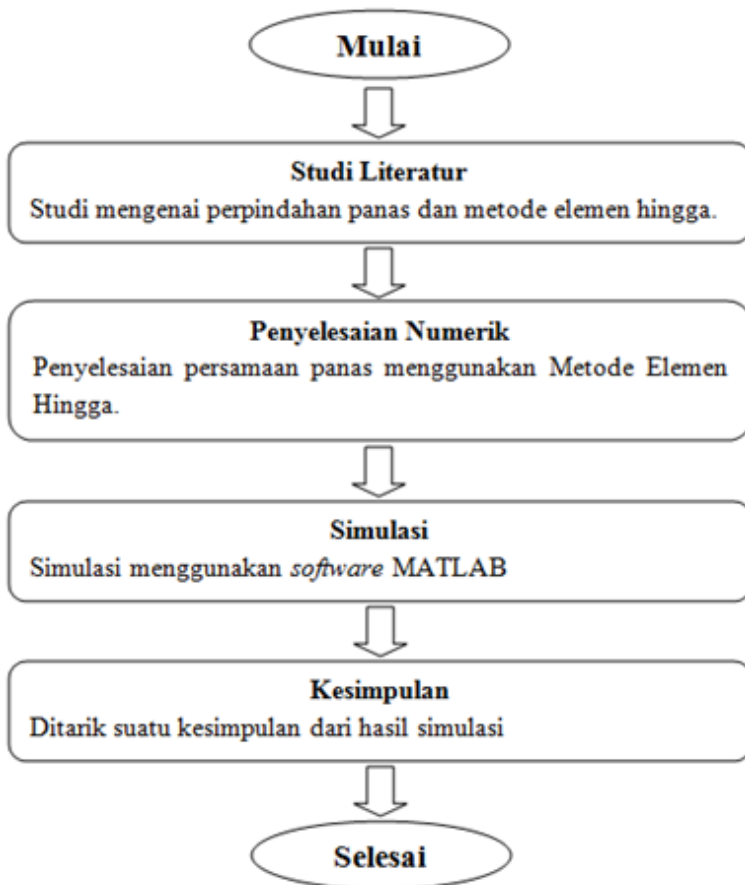
Objek guna mencapai tujuan dari penulisan ini, akan dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

- a. Studi Literatur
Pada tahap ini dikumpulkan referensi dimana didalamnya terdapat teori-teori dasar yang mendukung pembahasan masalah. Selanjutnya akan dipelajari lebih lanjut tentang perpindahan panas pada pelat dan metode elemen hingga.
- b. Penyelesaian Numerik
Pada tahap ini akan dilakukan penyelesaian secara numerik dari persamaan perpindahan panas pada lapisan tengah pelat menggunakan metode elemen hingga. Dimulai dengan diskritisasi domain pada pelat. Selanjutnya fungsi bentuk yang digunakan adalah fungsi interpolasi elemen segiempat linier. Kemudian fungsi bentuk ini disubstitusikan ke persamaan diferensial yang akan diselesaikan dengan formulasi galerkin. Dibentuk matriks global yang disusun dari matriks tiap elemen.
- c. Simulasi
Pada tahap ini dilakukan simulasi menggunakan MATLAB untuk melihat laju perpindahan panas yang terjadi pada pelat.

- d. Kesimpulan
Pada tahap ini akan dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil simulasi MATLAB.
- e. Pembuatan Laporan Tugas Akhir
Pada tahap akhir ini dilakukan penulisan hasil yang telah diperoleh selama melakukan penelitian.

3.2 Diagram Alir Metode Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini ditampilkan dalam diagram alir penelitian pada Gambar 3.1:



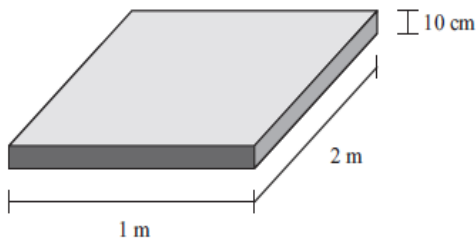
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

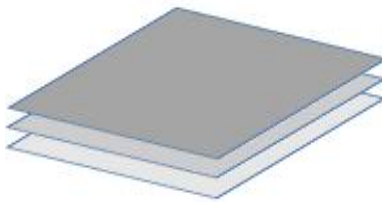
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan secara detail mengenai model *governing equation* perpindahan panas, diskritisasi domain, fungsi bentuk aproksimasi, perhitungan properti elemen, pembentukan sistem persamaan linier, pemecahan sistem persamaan linier, penyelesaian numerik dan simulasi.

Tugas Akhir ini membahas tentang perpindahan panas yang terjadi pada lapisan tengah pelat dimana dimensi pelat yang dikaji adalah pelat baja datar berbentuk segiempat tiga dimensi yang kemudian dibagi menjadi tiga lapisan, ditunjukkan oleh Gambar 4.1. dan Gambar 4.2.



Gambar 4.1[3], Dimensi pelat

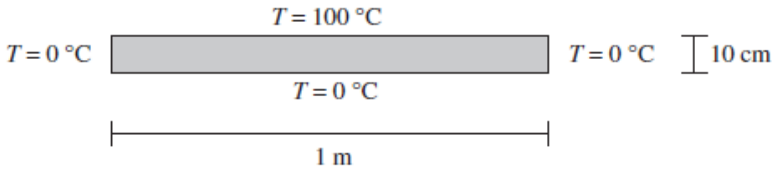


Gambar 4.2. Pelat yang dibagi menjadi 3 lapisan

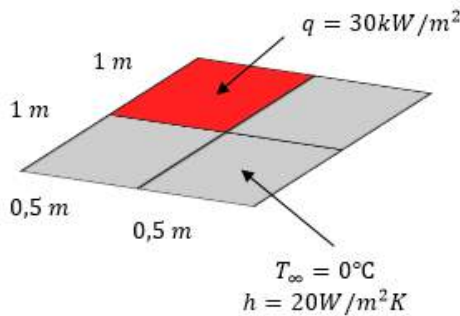
Kondisi batas yang diberikan pada pelat segiempat ditunjukkan oleh Gambar 4.3. dan Gambar 4.4. dimana kondisi sisi kanan, kiri dan bawah pelat terisolasi dengan suhu 0°C . Sedangkan permukaan pelat terisolasi pada suhu 100°C . Pada permukaan

setiap lapisan diberikan suhu fluida 0°C yang menyebabkan terjadinya pendinginan secara konveksi.

Diberikan baja dengan massa jenis $\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$, konduktivitas panas $k = 54 \text{ W/m.K}$ dan kapasitas panas $C = 465 \text{ J/kg.K}$.



Gambar 4.3[3], Skema kondisi batas pada sisi depan pelat



Gambar 4.4[3], Skema kondisi batas pada permukaan pelat

4.1 Model Governing Equation Perpindahan Panas

Governing Equation yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah persamaan perpindahan panas konduksi pada Persamaan 2.9. Karena ketebalan lapisan diasumsikan sangat tipis, maka dapat dikatakan bahwa gradien $\frac{\partial T}{\partial z}$ mendekati nol. Sehingga persamaan yang semula 3D untuk $T(x, y, z, t)$ menjadi 2D untuk $T(x, y, t)$ yaitu

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - Q = 0 \quad (4.1)$$

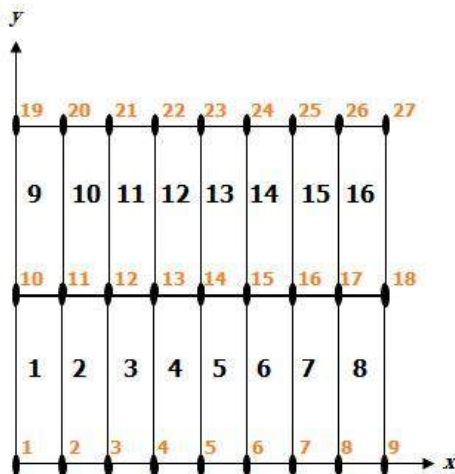
4.2 Diskritisasi Domain

Pelat baja yang dikaji pada Tugas Akhir ini kemudian didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node* untuk sisi depan pelat, ditunjukkan oleh Gambar 4.5.

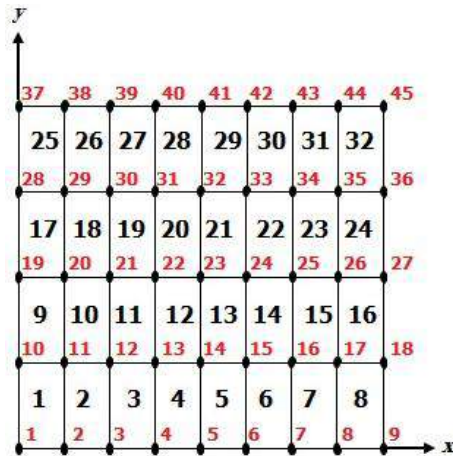


Gambar 4.5. Sisi depan pelat yang didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node*

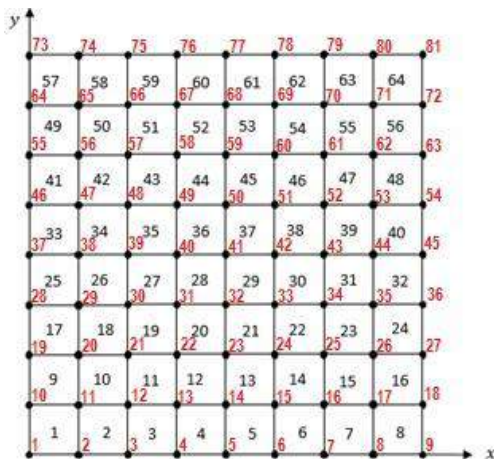
Sedangkan untuk permukaan pelat akan didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node*, 32 elemen dengan 45 *node* dan 64 elemen dengan 81 *node*. Ditunjukkan oleh Gambar 4.6, Gambar 4.7 dan Gambar 4.8.



Gambar 4.6. Permukaan pelat yang didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node*



Gambar 4.7. Permukaan pelat yang didiskritisasi menjadi 32 elemen dengan 45 node



Gambar 4.8. Permukaan pelat yang didiskritisasi menjadi 64 elemen dengan 81 node

Keterangan gambar :

- Angka dengan warna hitam melambangkan elemen.
- Angka dengan warna merah melambangkan node.

- c. $p = 1 \text{ m}$ dan $l = 0,1 \text{ m}$ untuk sisi depan pelat.
- d. $p = 1 \text{ m}$ dan $l = 2 \text{ m}$ untuk permukaan pelat.
- e. Panjang tiap elemen untuk Gambar 4.5 yaitu $2b = 0,125 \text{ m}$ dan $2a = 0,05 \text{ m}$.
- f. Panjang tiap elemen untuk Gambar 4.6 yaitu $2b = 0,125 \text{ m}$ dan $2a = 1 \text{ m}$.
- g. Panjang tiap elemen untuk Gambar 4.7 yaitu $2b = 0,125 \text{ m}$ dan $2a = 0,5 \text{ m}$.
- h. Panjang tiap elemen untuk Gambar 4.8 yaitu $2b = 0,125 \text{ m}$ dan $2a = 0,25 \text{ m}$.

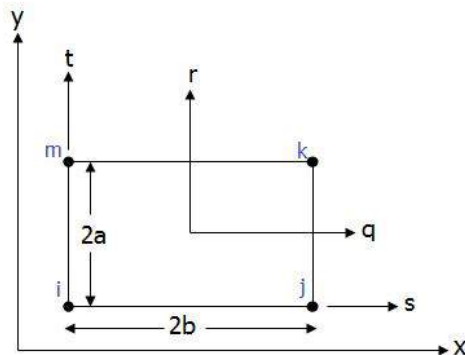
4.3 Fungsi Bentuk Aproksimasi

Pada Tugas Akhir ini, fungsi bentuk aproksimasi yang digunakan adalah fungsi interpolasi elemen segiempat linier. Elemen segiempat linier ini memiliki panjang $2b$ dan lebar $2a$.

Gambar 4.9. menunjukkan bentuk elemen segiempat linier dan sistem koordinat yang digunakan. Koordinat x dan y untuk sistem koordinat global, koordinat s dan t untuk sistem koordinat lokal dan koordinat q dan r untuk sistem koordinat natural.

Fungsi interpolasi dinyatakan pada koordinat lokal s dan t sebagai berikut[4] :

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 t + \alpha_4 st \quad (4.2)$$



Gambar 4.9[4], Parameter untuk elemen segiempat

Pada Gambar 4.9, nilai T pada masing – masing titik adalah :

$$\begin{aligned} T &= T_i && \text{pada saat } s = 0 \text{ dan } t = 0 \\ T &= T_j && \text{pada saat } s = 2b \text{ dan } t = 0 \\ T &= T_k && \text{pada saat } s = 2b \text{ dan } t = 2a \\ T &= T_m && \text{pada saat } s = 0 \text{ dan } t = 2a \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai T pada masing – masing titik adalah :

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 \\ T_j &= \alpha_1 + (2b)\alpha_2 \\ T_k &= \alpha_1 + (2b)\alpha_2 + (2a)\alpha_3 + (4ab)\alpha_4 \\ T_m &= \alpha_1 + (2b)\alpha_3 \end{aligned}$$

dan menghasilkan koefisien-koefisien sebagai berikut

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= T_i \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2b} (T_j - T_i) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2a} (T_m - T_i) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{4ab} (T_i - T_j + T_k - T_m) \end{aligned} \right. \quad (4.3)$$

Dengan substitusi Persamaan (4.3) ke Persamaan (4.2), diperoleh fungsi bentuk untuk elemen segiempat linier yang dapat dinyatakan sebagai pendekatan nilai distribusi suhu T yaitu

$$\begin{aligned} T &= N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k + N_m T_m \\ &= [N_i \quad N_j \quad N_k \quad N_m] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_m \end{bmatrix} \\ &= [N]\{T\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

dimana

$$\begin{cases} N_i = \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \left(1 - \frac{t}{2a}\right) \\ N_j = \frac{s}{2b} \left(1 - \frac{t}{2a}\right) \\ N_k = \frac{st}{4ab} \\ N_m = \frac{t}{2a} \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \end{cases} \quad (4.5)$$

Persamaan (4.5) merupakan fungsi bentuk yang berlaku untuk sistem koordinat lokal. Untuk fungsi bentuk yang berlaku pada sistem koordinat natural diperlukan transformasi persamaan antara koordinat st dan qr yang dinyatakan dengan

$$\begin{cases} s = b + q \\ t = a + r \end{cases} \quad (4.6)$$

substitusi Persamaan (4.6) ke Persamaan (4.5) sehingga diperoleh fungsi bentuk yaitu

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_j = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_k = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \\ N_m = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \end{cases} \quad (4.7)$$

4.4 Perhitungan Properti Elemen

Governing equation pada Tugas Akhir ini dihitung dengan menggunakan pendekatan residu berbobot (*weighted residue*). Metode residu berbobot adalah metode aproksimasi untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan memberikan nilai bobot pada residual atau sisa dari aproksimasi persamaan.

Formulasi Galerkin merupakan salah satu metode residual yang digunakan agar residual menjadi minimal yaitu mengalikan integrasi residual dengan suatu fungsi bobot $W_i(x)$

$$\int_{\Omega} W_i(x) R(x) d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

dimana fungsi bobot diganti dengan fungsi bentuk atau *shape function* dan $R(x)$ digantikan dengan *governing equation* perpindahan panas pada Persamaan (4.1). Sedangkan notasi Ω melambangkan batasan integral pada luasan maupun volume. Sehingga Persamaan (4.8) menjadi

$$\begin{aligned} \int_A [N]^T \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - Q \right) dA &= 0 \\ \int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA - \int_A [N]^T k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dA - \int_A [N]^T k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dA \\ - \int_A [N]^T Q dA &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Untuk suku kedua dan ketiga dari Persamaan (4.9) merupakan persamaan derivatif tingkat dua yang harus disederhanakan menjadi persamaan derivatif tingkat satu dengan menggunakan Teorema Green.

$$\begin{aligned} \int_A k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dA &= \int_{y_0}^{y_n} \left[\int_{x_0}^{x_n} k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right] dy \\ &= \int_{y_0}^{y_n} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_0}^{x_n} - \int_{x_0}^{x_n} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dx \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y_0}^{y_n} k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_0}^{x_n} dy - \int_{y_0}^{y_n} \int_{x_0}^{x_n} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dx dy \\
&= \int_{y_0}^{y_n} k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_n} dy - \int_{y_0}^{y_n} k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_0} dy - \int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dA \\
&= \int_S k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{n}_x dS - \int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dA \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_A k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dA &= \int_{x_0}^{x_n} \left[\int_{y_0}^{y_n} k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \right] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_n} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_0}^{y_n} - \int_{y_0}^{y_n} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} dy \right] dx \\
&= \int_{x_0}^{x_n} k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_0}^{y_n} dx - \int_{x_0}^{x_n} \int_{y_0}^{y_n} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} dy dx \\
&= \int_{x_0}^{x_n} k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_n} dx - \int_{x_0}^{x_n} k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_0} dx - \int_A \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} dA \\
&= \int_S k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{n}_y dS - \int_A \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} dA \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Disini terlihat bahwa terdapat dua integral dengan derivatif tingkat satu. Salah satu dari integralnya adalah integral garis. Selanjutnya substitusi Persamaan (4.10) dan (4.11) ke Persamaan (4.9)

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA - \left([N]^T \left(- \int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dA + \int_S k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{n}_x dS \right) \right) \\
& \quad - \left([N]^T \left(- \int_A \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} dA + \int_S k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{n}_y dS \right) \right) \\
& \quad - \int_A [N]^T Q dA = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA - \int_S [N]^T k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{n}_x dS \\
& \quad + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA - \int_S [N]^T k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{n}_y dS \\
& \quad - \int_A [N]^T Q dA = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA \\
& \quad - \int_S [N]^T k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{n}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{n}_y \right) dS \\
& \quad - \int_A [N]^T Q dA = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA \\
& + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA - \int_S [N]^T k \frac{\partial T}{\partial n} \bar{n} dS \\
& - \int_A [N]^T Q dA = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

dengan \bar{n} adalah vektor satuan. Suku $k \frac{\partial T}{\partial n}$ adalah *flux* yang berfungsi pada permukaan S . Dimana kondisi batas konduksi dan konveksi pada permukaan S diberikan sebagai berikut

$$\left\{ \begin{array}{l} k \frac{\partial T}{\partial n} = q \\ k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_\infty - T) \end{array} \right. \tag{4.13}$$

4.5 Pembentukan Sistem Persamaan Linier

Untuk membentuk sistem persamaan linier secara keseluruhan maka Persamaan (4.4) dan (4.13) disubstitusikan ke Persamaan (4.12), diperoleh

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C [N] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} dA - \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} k \frac{\partial [N]}{\partial x} \{T\} dA \\
& - \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial y} k \frac{\partial [N]}{\partial y} \{T\} dA \\
& - \int_S [N]^T (q + h(T_\infty - T)) dS - \int_A [N]^T Q dA = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C [N] \{\dot{T}\} dA - \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} k \frac{\partial [N]}{\partial x} \{T\} dA - \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial y} k \frac{\partial [N]}{\partial y} \{T\} dA \\
& - \int_S [N]^T q dS - \int_S [N]^T h T_\infty dS - \int_S [N]^T h [N] \{T\} dS \\
& - \int_A [N]^T Q dA = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A [N]^T \rho C [N] \{\dot{T}\} dA - \int_A k \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} dA + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{T\} dA \\
& - \int_S [N]^T h [N] \{T\} dS \\
& = \int_A [N]^T Q dA + \int_S [N]^T q dS + \int_S [N]^T h T_\infty dS
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$[K_G] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{f\} \quad (4.14)$$

dimana

$$[K_G] = \int_A [N]^T \rho C [N] dA \quad (4.15)$$

$$[K] = [K_D] + [K_M]$$

$$[K_D] = \int_A k \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} dA + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \quad (4.16)$$

$$[K_M] = \int_S [N]^T h [N] dS \quad (4.17)$$

$$\{f\} = \{f_Q\} + \{f_q\} + \{f_h\}$$

$$\{f_Q\} = \int_A [N]^T Q dA \quad (4.18)$$

$$\{f_q\} = \int_S [N]^T q dS \quad (4.19)$$

$$\{f_h\} = \int_S [N]^T h T_\infty dS \quad (4.20)$$

4.6 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Sebelum melakukan perhitungan untuk memperoleh matriks kekakuan kapasitansi $[K_G^{(e)}]$, matriks kekakuan konduksi $[K_D^{(e)}]$ dan vektor kekakuan konduksi $\{f_Q^{(e)}\}$ perlu diketahui bahwa fungsi bentuk yang digunakan adalah fungsi bentuk pada Persamaan (4.5) dengan koordinat st .

Variabel xy digantikan dengan st dimana batas integral yang berlaku untuk koordinat lokal st adalah

$$\begin{aligned} 0 < s < 2b \\ 0 < t < 2a \end{aligned}$$

Sehingga dapat definisikan

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(s, t) ds dt = \int_0^{2a} \int_0^{2b} f(s, t) ds dt$$

Sedangkan untuk memperoleh vektor kekakuan konduksi $\{f_q^{(e)}\}$, matriks kekakuan konveksi $[K_M^{(e)}]$ dan vektor kekakuan konveksi $\{f_h^{(e)}\}$, digunakan fungsi bentuk pada Persamaan (4.7) yang menggunakan koordinat qr . Batas integral yang berlaku untuk koordinat qr adalah

$$\begin{aligned} -b < s < b \\ -a < t < a \end{aligned}$$

Sehingga dapat didefinisikan

$$\begin{aligned} \int_s f(q) dq &= \int_{-b}^b f(q) dq \\ \int_s f(r) dr &= \int_{-a}^a f(r) dr \end{aligned}$$

4.6.1 Menghitung Matriks Kekakuan Kapasitansi

Persamaan (4.15) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} [K_G^{(e)}] &= \int_A G[N]^T [N] dA \quad \text{dengan } G = \rho C. \\ &= G \int_A [N]^T [N] dA \\ &= G \int_A \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} [N_i \quad N_j \quad N_k \quad N_m] dA \\ &= G \int_A \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k & N_i N_m \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k & N_j N_m \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 & N_k N_m \\ N_i N_m & N_j N_m & N_k N_m & N_m^2 \end{bmatrix} dA \end{aligned}$$

Matriks dari uraian persamaan (4.15) merupakan matriks simetri. Sehingga untuk mendapatkan nilai matriksnya, dilakukan perhitungan untuk masing-masing koefisien yang ada pada matriks segitiga atas. Diambil salah satu koefisien matriks di atas yaitu N_i untuk dihitung. Diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_A N_i^2 dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(1 - \frac{s}{2b} - \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab}\right)^2 ds dt \\
 &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(1 - \frac{s}{b} - \frac{t}{a} + \frac{st}{ab} + \frac{s^2}{4b^2} + \frac{t^2}{4a^2} - \frac{s^2t}{4ab^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{st^2}{4a^2b} + \frac{s^2t^2}{16a^2b^2}\right) ds dt \\
 &= \int_0^{2b} \left[t - \frac{st}{b} - \frac{t^2}{2a} + \frac{st^2}{2ab} + \frac{s^2t}{4b^2} + \frac{t^3}{12a^2} - \frac{s^2t^2}{8ab^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{st^3}{12a^2b} + \frac{s^2t^3}{48a^2b^2} \right]_0^{2a} ds \\
 &= \int_0^{2b} \left[\frac{2a}{3} - \frac{2sa}{3b} + \frac{s^2a}{6b^2} \right] ds \\
 &= \left[\frac{2sa}{3} - \frac{2as^2}{6b} + \frac{s^3a}{18b^2} \right]_0^{2b} \\
 &= \frac{4ab}{3} - \frac{8ab^2}{6b} + \frac{8ab^3}{18b^2} \\
 &= \frac{4}{9}ab \quad \text{dengan } A = 4ab. \\
 &= \frac{4A}{36}
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh nilai untuk masing-masing koefisien matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\int_A N_j^2 dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{s}{2b} - \frac{st}{4ab} \right)^2 ds dt \\ &= \frac{4A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_k^2 dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{st}{4ab} \right)^2 ds dt \\ &= \frac{4A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_m^2 dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{t}{2a} - \frac{st}{4ab} \right)^2 ds dt \\ &= \frac{4A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_i N_j dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(1 - \frac{s}{2b} - \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab} \right) \left(\frac{s}{2b} - \frac{st}{4ab} \right) ds dt \\ &= \frac{2A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_i N_k dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(1 - \frac{s}{2b} - \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab} \right) \left(\frac{st}{4ab} \right) ds dt \\ &= \frac{A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_i N_m dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(1 - \frac{s}{2b} - \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab} \right) \left(\frac{t}{2a} - \frac{st}{4ab} \right) ds dt \\ &= \frac{2A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_j N_k dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{s}{2b} - \frac{st}{4ab} \right) \left(\frac{st}{4ab} \right) ds dt \\ &= \frac{2A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_j N_m dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{s}{2b} - \frac{st}{4ab} \right) \left(\frac{t}{2a} - \frac{st}{4ab} \right) ds dt \\ &= \frac{A}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A N_k N_m dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{st}{4ab} \right) \left(\frac{t}{2a} - \frac{st}{4ab} \right) ds dt \\ &= \frac{2A}{36}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$[K_G^{(e)}] = \frac{GA}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.6.2 Menghitung Matriks Kekakuan Konduksi

Sebelum menghitung integral dari persamaan (4.16), didefinisikan :

$$[D] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gradien vektor :

$$\{gv\} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial s}, \frac{\partial T}{\partial t} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial s} \\ \frac{\partial [N]}{\partial t} \end{bmatrix} \{T^e\} = [B] \{T^e\}$$

dimana pada kolom pertama $\{gv\}$ adalah turunan dari $[N]$ terhadap s dan kolom kedua adalah turunan dari $[N]$ terhadap t . Sedangkan $[B]^T = \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial s} \quad \frac{\partial [N]^T}{\partial t} \right]$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 [K_D^{(e)}] &= \int_A \left(k \frac{\partial [N]^T}{\partial s} \frac{\partial [N]}{\partial s} + k \frac{\partial [N]^T}{\partial t} \frac{\partial [N]}{\partial t} \right) dA \\
 &= \int_A [B]^T [D] [B] dA \\
 &= \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_j}{\partial s} & \frac{\partial N_j}{\partial t} \\ \frac{\partial N_k}{\partial s} & \frac{\partial N_k}{\partial t} \\ \frac{\partial N_m}{\partial s} & \frac{\partial N_m}{\partial t} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & \frac{\partial N_j}{\partial s} & \frac{\partial N_k}{\partial s} & \frac{\partial N_m}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} & \frac{\partial N_j}{\partial t} & \frac{\partial N_k}{\partial t} & \frac{\partial N_m}{\partial t} \end{bmatrix} dA
 \end{aligned}$$

Diperoleh turunan pertama dari Persamaan (4.5) yang akan digunakan untuk memperoleh nilai matrikss kekakuan konduksi $[K_D^{(e)}]$, yaitu :

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{1}{4ab}(t - 2a) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{1}{4ab}(s - 2b)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial s} = \frac{1}{4ab}(2a - t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{1}{4ab}(-s)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial s} = \frac{1}{4ab}(t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N_k}{\partial t} = \frac{1}{4ab}(s)$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial s} = \frac{1}{4ab}(-t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N_m}{\partial t} = \frac{1}{4ab}(2b - s)$$

Sehingga diperoleh,

$$[B] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(2a-t) & (2a-t) & t & -t \\ -(2b-s) & -s & s & (2b-s) \end{bmatrix}$$

$$[B]^T = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(2a-t) & -(2b-s) \\ (2a-t) & -s \\ t & s \\ -t & (2b-s) \end{bmatrix}$$

Maka Persamaan (4.16) menjadi,

$$\begin{aligned} [K_D^{(e)}] &= \int_A \frac{k}{16a^2b^2} \left(\begin{bmatrix} -(2a-t) & -(2b-s) \\ (2a-t) & -s \\ t & s \\ -t & (2b-s) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(2a-t) & (2a-t) & t & -t \\ -(2b-s) & -s & s & (2b-s) \end{bmatrix} \right) dA \\ &= \frac{k}{16a^2b^2} \int_A \begin{bmatrix} (2a-t)^2 & -(2a-t)^2 & -(2a-t)t & (2a-t)t \\ -(2a-t)^2 & (2a-t)^2 & (2a-t)t & -(2a-t)t \\ -(2a-t)t & (2a-t)t & t^2 & -t^2 \\ (2a-t)t & -(2a-t)t & -t^2 & t^2 \end{bmatrix} dA \\ &\quad + \frac{k}{16a^2b^2} \int_A \begin{bmatrix} (2b-s)^2 & (2b-s)s & -(2b-s)s & -(2b-s)^2 \\ (2b-s)s & s^2 & -s^2 & -(2b-s)s \\ -(2b-s)s & -s^2 & s^2 & (2b-s)s \\ -(2b-s)^2 & -(2b-s)s & (2b-s)s & (2b-s)^2 \end{bmatrix} dA \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai pada matriks pertama dan matriks kedua dari persamaan di atas, dilakukan perhitungan pada masing-masing koefisien. Dimulai dari matriks pertama yaitu dengan menghitung koefisien pertama, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{k}{16a^2b^2} \int_A (2a-t)^2 dA &= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \int_0^{2a} (2a-t)^2 dt ds \\
&= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \int_0^{2a} (4a^2 - 4at + t^2) dt ds \\
&= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \left(8a^3 - 8a^3 + \frac{8}{3}a^3 \right) ds \\
&= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \left(\frac{8}{3}a^3 \right) ds \\
&= \frac{k}{16a^2b^2} \left(\frac{8a^3 \cdot 2b}{3} \right) \\
&= \frac{2ak}{6b}
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai matriks pertama, yaitu

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A -(2a-t)^2 dA = -\frac{2ak}{6b}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A -(2a-t)t dA = -\frac{ak}{6b}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A (2a-t)t dA = \frac{ak}{6b}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A -t^2 dA = -\frac{2ak}{6b}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A t^2 dA = \frac{2ak}{6b}$$

Menghitung salah satu koefisien dari matriks kedua, yaitu koefisien pertama, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{k}{16a^2b^2} \int_A (2b-s)^2 dA &= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \int_0^{2a} (2b-s)^2 dt ds \\ &= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \int_0^{2a} (4b^2 - 4bs + s^2) dt ds \\ &= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \left(8b^3 - 8b^3 + \frac{8}{3}b^3 \right) ds \\ &= \frac{k}{16a^2b^2} \int_0^{2b} \left(\frac{8}{3}b^3 \right) ds \\ &= \frac{k}{16a^2b^2} \left(\frac{8b^3 \cdot 2a}{3} \right) \\ &= \frac{2bk}{6a} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai matriks kedua, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{k}{16a^2b^2} \int_A (2b-s)s dA &= \frac{bk}{6a} \\ \frac{k}{16a^2b^2} \int_A -(2b-s)s dA &= -\frac{bk}{6a} \end{aligned}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A -(2b-s)^2 dA = -\frac{2bk}{6a}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A -s^2 dA = -\frac{2bk}{6a}$$

$$\frac{k}{16a^2b^2} \int_A s^2 dA = \frac{2bk}{6a}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} [K_D^{(e)}] &= \frac{ak}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{bk}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Persamaan (4.18) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \{f_Q^{(e)}\} &= \int_A Q[N]^T dA \\ &= \int_A Q \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} dA \end{aligned}$$

Menghitung integral dari salah satu koefisien matriks pada persamaan di atas yaitu N_k , diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_A N_k dA &= \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left(\frac{st}{4ab} \right) dt ds \\
&= \int_0^{2b} \frac{st^2}{8ab} \Big|_0^{2a} ds \\
&= \int_0^{2b} \frac{as}{2b} ds \\
&= \frac{as^2}{4b} \Big|_0^{2b} \\
&= \frac{4ab^2}{4b} \quad \text{dengan } A = 4ab. \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai matriksnya, yaitu

$$\int_A N_i dA = \int_A N_j dA = \int_A N_m dA = \frac{A}{4}$$

Sehingga diperoleh,

$$\{f_Q^{(e)}\} = \frac{QA}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

4.6.3 Menghitung Matriks Kekakuan Konveksi

Dengan menggunakan persamaan Persamaan (4.6), pada Gambar 4.7, nilai pada masing – masing sisi adalah :

$$\begin{array}{ll}
i - j & \text{pada saat } t = 0 \text{ dan } r = -a \\
k - m & \text{pada saat } t = 2a \text{ dan } r = a \\
j - k & \text{pada saat } s = 2b \text{ dan } q = b \\
m - i & \text{pada saat } s = 0 \text{ dan } q = -b
\end{array}$$

Nilai tersebut berlaku pada tiap sisi yang dikenakan konveksi dan menyebabkan tiap sisi memiliki matriks yang berbeda. Persamaan (4.17) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 [K_M] &= \int_S [N]^T h [N] dS \\
 &= h \int_S [N]^T [N] dS \\
 &= h \int_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} [N_i \quad N_j \quad N_k \quad N_m] dS \\
 &= h \int_S \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k & N_i N_m \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k & N_j N_m \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 & N_k N_m \\ N_i N_m & N_j N_m & N_k N_m & N_m^2 \end{bmatrix} dS
 \end{aligned}$$

Jika menghitung sisi ij maka $N_k = N_m = 0$. Sehingga persamaan diatas menjadi

$$[K_M^{(e)}] = h \int_{-b}^b \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & 0 & 0 \\ N_i N_j & N_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dq$$

Menghitung integral dari salah satu koefisien matriks menggunakan Persamaan (4.7) dengan $r = -a$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-b}^b N_i^2 dq &= \int_{-b}^b \left(\frac{b-q}{2b} \right)^2 dq \\
 &= \frac{2b}{3} \\
 &= \frac{L_{ij}}{3}
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai matriksnya, yaitu

$$\begin{aligned}\int_{-b}^b N_j^2 dq &= \int_{-b}^b \left(\frac{b+q}{4b^2}\right)^2 dq \\ &= \frac{L_{ij}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-b}^b N_i N_j dq &= \int_{-b}^b \frac{(b-q)(b+q)}{4b^2} dq \\ &= \frac{L_{ij}}{6}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Perhitungan untuk sisi ij juga berlaku untuk sisi lainnya dengan memasukkan nilai yang berlaku pada setiap sisinya. Sehingga diperoleh,

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{km}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{im}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Persamaan (4.20) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \{f_h\} &= \int_S [N]^T h T_\infty dS \\
 &= \int_S [N]^T H dS \\
 &= \int_{-b}^b H \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} dq
 \end{aligned}$$

Jika menghitung sisi ij maka $N_k = N_m = 0$. Sehingga persamaan diatas menjadi

$$\{f_h^{(e)}\} = \int_{-b}^b H \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dq$$

Menghitung integral dari koefisien matriks menggunakan Persamaan (4.7) dengan $r = -a$

$$\int_{-b}^b (b - q) dq = \left(bq - \frac{q^2}{2} \right) \Big|_{-b}^b = 2b^2$$

$$\int_{-b}^b (b + q) dq = \left(bq + \frac{q^2}{2} \right) \Big|_{-b}^b = 2b^2$$

Sehingga diperoleh,

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Perhitungan untuk sisi ij juga berlaku untuk sisi lainnya dengan memasukkan nilai yang berlaku pada setiap sisinya. Sehingga diperoleh,

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{km}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{im}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

untuk mendapatkan vektor kekakuan konduksi dari Persamaan (4.19) , dilakukan perhitungan dengan langkah yang sama pada Persamaan (4.20). Sehingga diperoleh,

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{km}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{im}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

4.7 Post Process Hasil

Tugas Akhir ini merupakan masalah perpindahan panas transien dimana variabel penentunya adalah x, y dan t (waktu). Setelah mendapatkan penyelesaian sistem persamaan secara global yaitu pada Persamaan (4.14) dimana terdapat suku derivatif $\{\dot{T}\}$ yang kemudian dapat diekspresikan oleh $\{T\}$ dengan menggunakan diskritisasi beda hingga (*finite difference method*).

Karena yang diketahui adalah suhu awal maka metode beda hingga yang digunakan adalah beda maju. $\{\dot{T}\}$ yang dihitung dengan beda maju yaitu

$$\{\dot{T}\}(t) = \frac{\{T\}(t + \Delta t) - \{T\}(t)}{\Delta t} \quad (4.36)$$

Substitusi Persamaan (4.36) ke Persamaan (4.14), diperoleh

$$\{T\}(t + \Delta t) = [K_G]^{-1}\{f_s\}\Delta t - [K_G]^{-1}[K]\{T\}(t)\Delta t + \{T\}(t) \quad (4.37)$$

4.8 Simulasi dan Analisis

Pada Tugas Akhir ini, dilakukan dua kali simulasi yaitu pada sisi depan dan permukaan pelat.

a. Sisi Depan Pelat

Simulasi dilakukan dengan kondisi batas yang ditunjukkan oleh Gambar 4.3 serta diskritisasi domain oleh Gambar 4.5.

Diperoleh matriks kekakuan lokal $[K^{(e)}]$ dan $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen dengan nilai yang sama karena tidak ada konveksi yang masuk yaitu sebagai berikut

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 52.2000 & 15.3000 & -26.1000 & -41.4000 \\ 15.3000 & 52.2000 & -41.4000 & -26.1000 \\ -26.1000 & -41.4000 & 52.2000 & 15.3000 \\ -41.4000 & -26.1000 & 15.3000 & 52.2000 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^{(e)}] = 1.0e + 03 \begin{bmatrix} 0.2529 & 1,2647 & 0.6324 & 1,2647 \\ 1,2647 & 0.2529 & 1,2647 & 0.6324 \\ 0.6324 & 1,2647 & 0.2529 & 1,2647 \\ 1,2647 & 0.6324 & 1,2647 & 0.2529 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f^{(e)}\}$ untuk setiap elemen juga sama yaitu 0 karena tidak ada energi dalam, konveksi dan *flux* yang masuk pada pelat.

$$\{f^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

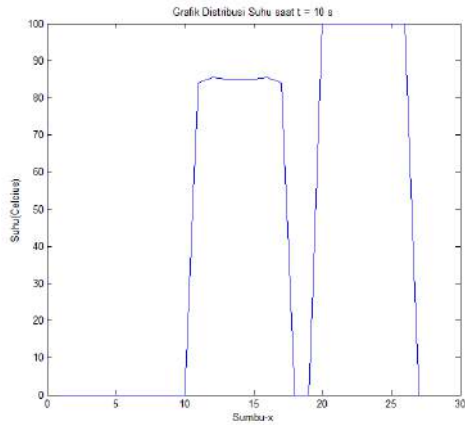
Setelah mendapatkan matriks kekakuan lokal untuk setiap elemen maka dengan perhitungan MATLAB diperoleh matriks kekakuan global untuk $[K]$, $[K_G]$ dan $\{f\}$. Kemudian matriks kekakuan global tersebut akan disubstitusikan pada Persamaan (4.37). Selanjutnya disimulasikan pada saat $t = 10$ s dan 37 s dimana hasil *output* yang diambil hanya suhu yang terjadi pada *node* 10-18.

Kemudian hasil pada *node* tersebut akan dijadikan *inputan* suhu awal pada permukaan pelat yang akan disimulasikan selanjutnya. Berikut adalah grafik serta tabel distribusi suhu dari hasil *running* MATLAB dengan waktu yang sudah ditentukan.

1. Saat $t = 10$ s

Gambar 4.10 menunjukkan grafik distribusi suhu pada sisi depan pelat saat $t = 10$ s. Distribusi suhu yang dihasilkan pada *node* 11-17 saat itu berkisar antara 83-85 °C. Tabel distribusi suhu ditampilkan pada Lampiran A. Suhu tersebut masih belum dapat digunakan sebagai *inputan* suhu awal pada

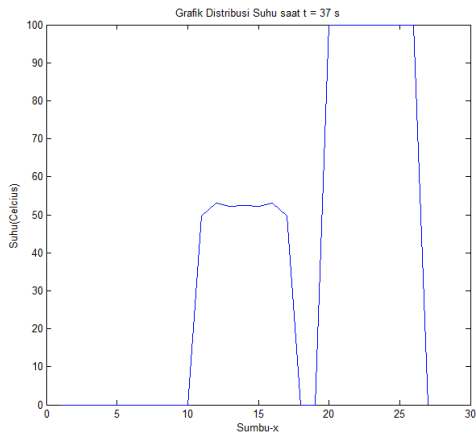
simulasi berikutnya. Hal ini dikarenakan suhu tersebut dianggap masih belum mendekati suhu pada bagian tengah dari sisi depan pelat.



Gambar 4.10. Grafik Distribusi Suhu saat $t = 10$ s

2. Saat $t = 37$ s

Gambar 4.11 menunjukkan grafik distribusi suhu pada sisi depan pelat saat $t = 37$ s.



Gambar 4.11. Grafik Distribusi Suhu saat $t = 37$ s

Distribusi suhu yang dihasilkan pada saat itu sekitar 49-53 °C. Tabel distribusi suhu ditampilkan pada Lampiran B Suhu tersebut dianggap sudah mendekati suhu pada bagian tengah dari sisi depan pelat. Sehingga suhu tersebut dapat digunakan sebagai *inputan* suhu awal untuk permukaan pelat pada simulasi berikutnya.

b. Permukaan Pelat

Simulasi dilakukan dengan kondisi batas yang ditunjukkan oleh Gambar 4.4 serta diskritisasi domain oleh Gambar 4.6, Gambar 4.7 dan Gambar 4.8.

b.1 Permukaan Pelat dengan 16 Elemen dan 27 Node

Diperoleh matriks kekakuan lokal $[K^{(e)}]$ dan $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen. Nilai $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen sama, yaitu

$$[K_G^{(e)}] = 1.0e + 04 \begin{bmatrix} 5.0588 & 2.5294 & 1.2647 & 2.5294 \\ 2.5294 & 5.0588 & 2.5294 & 1.2647 \\ 1.2647 & 2.5294 & 5.0588 & 2.5294 \\ 2.5294 & 1.2647 & 2.5294 & 5.0588 \end{bmatrix}$$

Sedangkan nilai $[K^{(e)}]$ setiap elemen berbeda-beda. Hal ini disebabkan karena adanya konveksi yang masuk pada elemen-elemen tertentu. Nilai $[K^{(e)}]$ pada kondisi ini terdiri dari $[K_D^{(e)}]$ dan $[K_M^{(e)}]$.

Nilai $[K_D^{(e)}]$ merupakan $[K^{(e)}]$ untuk setiap elemen yang tidak terkena konveksi dan bernilai yang sama, yaitu

$$[K_D^{(e)}] = \begin{bmatrix} 146.2500 & -142.8750 & -73.1250 & 69.7500 \\ -142.8750 & 146.2500 & 69.7500 & -73.1250 \\ -73.1250 & 69.7500 & 146.2500 & -142.8750 \\ 69.7500 & -73.1250 & -142.8750 & 146.2500 \end{bmatrix}$$

Nilai $[K_M^{(e)}]$ juga bernilai sama untuk setiap elemen yang dikenai konveksi. Elemen-elemen yang terkena konveksi adalah elemen 5 sampai 8. Sehingga diperoleh,

$$[K_M^{(e)}] = \begin{bmatrix} 7.5000 & 0.4167 & 0 & 3.3333 \\ 0.4167 & 7.5000 & 3.3333 & 0 \\ 0 & 3.3333 & 7.5000 & 0.4167 \\ 3.3333 & 0 & 0.4167 & 7.5000 \end{bmatrix}$$

Setelah nilai $[K_M^{(e)}]$ diketahui, maka nilai $[K^{(e)}]$ untuk setiap elemen yang terkena konveksi yaitu

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 153.7500 & -142.4583 & -73.1250 & 73.0833 \\ -142.4583 & 153.7500 & 73.0833 & -73.1250 \\ -73.1250 & 73.0833 & 153.7500 & -142.4583 \\ 73.0833 & -73.1250 & -142.4583 & 153.7500 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f^{(e)}\}$ untuk tiap elemen berbeda-beda, hal ini disebabkan karena adanya pengaruh konveksi serta *flux* yang masuk.

$$\{f_Q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f_Q^{(e)}\}$ untuk setiap elemen bernilai 0 karena tidak ada energi dalam yang masuk.

$$\{f_h^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f_h^{(e)}\}$ untuk setiap elemen bernilai 0 karena $T_\infty = 0$. Sedangkan untuk elemen-elemen yang dikenai *flux*, yaitu elemen 9 sampai 12 memiliki nilai

$$\{f_q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 15.0000 \\ 15.0000 \\ 16.8750 \\ 16.8750 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks kekakuan lokal untuk setiap elemen maka dengan perhitungan MATLAB diperoleh matriks kekakuan global untuk $[K]$, $[K_G]$ dan $\{f\}$. Kemudian matriks kekakuan global tersebut akan disubstitusikan pada Persamaan (4.37).

b.2 Permukaan Pelat dengan 32 Elemen dan 45 Node

Diperoleh matriks kekakuan lokal $[K^{(e)}]$ dan $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen. Nilai $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen sama, yaitu

$$[K_G^{(e)}] = 1.0e + 04 \begin{bmatrix} 2.5294 & 1.2647 & 0.6324 & 1.2647 \\ 1.2647 & 2.5294 & 1.2647 & 0.6324 \\ 0.6324 & 1.2647 & 2.5294 & 1.2647 \\ 1.2647 & 0.6324 & 1.2647 & 2.5294 \end{bmatrix}$$

Sedangkan nilai $[K^{(e)}]$ setiap elemen berbeda-beda. Hal ini disebabkan karena adanya konveksi yang masuk pada elemen-elemen tertentu. Nilai $[K^{(e)}]$ pada kondisi ini terdiri dari $[K_D^{(e)}]$ dan $[K_M^{(e)}]$.

Nilai $[K_D^{(e)}]$ merupakan $[K^{(e)}]$ untuk setiap elemen yang tidak terkena konveksi dan bernilai yang sama, yaitu

$$[K_D^{(e)}] = \begin{bmatrix} 76.5000 & -69.7500 & -38.2500 & 31.5000 \\ -69.7500 & 76.5000 & 31.5000 & -38.2500 \\ -38.2500 & 31.5000 & 76.5000 & -69.7500 \\ 31.5000 & -38.2500 & -69.7500 & 76.5000 \end{bmatrix}$$

Nilai $[K_M^{(e)}]$ juga bernilai sama untuk setiap elemen yang dikenai konveksi. Elemen-elemen yang terkena konveksi adalah elemen 5-8 dan 13-16. Sehingga diperoleh,

$$[K_M^{(e)}] = \begin{bmatrix} 4.1667 & 0.4167 & 0 & 1.6667 \\ 0.4167 & 4.1667 & 1.6667 & 0 \\ 0 & 1.6667 & 4.1667 & 0.4167 \\ 1.6667 & 0 & 0.4167 & 4.1667 \end{bmatrix}$$

Setelah nilai $[K_M^{(e)}]$ diketahui, maka nilai $[K^{(e)}]$ untuk setiap elemen yang terkena konveksi yaitu

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 80.6667 & -69.3333 & -38.2500 & 33.1667 \\ -69.3333 & 80.6667 & 33.1667 & -38.2500 \\ -38.2500 & 33.1667 & 80.6667 & -69.3333 \\ 33.1667 & -38.2500 & -69.3333 & 80.6667 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f^{(e)}\}$ untuk tiap elemen berbeda-beda, hal ini disebabkan karena adanya pengaruh konveksi serta *flux* yang masuk.

$$\{f_Q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f_Q^{(e)}\}$ untuk setiap elemen bernilai 0 karena tidak ada energi dalam yang masuk.

$$\{f_h^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f_h^{(e)}\}$ untuk setiap elemen bernilai 0 karena $T_\infty = 0$. Sedangkan untuk elemen-elemen yang dikenai *flux*, yaitu elemen 9 sampai 12 memiliki nilai

$$\{f_q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 7.5000 \\ 7.5000 \\ 9.3750 \\ 9.3750 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks kekakuan lokal untuk setiap elemen maka dengan perhitungan MATLAB diperoleh matriks kekakuan global untuk $[K]$, $[K_G]$ dan $\{f\}$. Kemudian

matriks kekuan global tersebut akan disubstitusikan pada Persamaan (4.37).

b.3 Permukaan Pelat dengan 64 Elemen dan 81 Node

Diperoleh matriks kekakuan lokal $[K^{(e)}]$ dan $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen. Nilai $[K_G^{(e)}]$ untuk setiap elemen sama, yaitu

$$[K_G^{(e)}] = 1.0e + 04 \begin{bmatrix} 1,2647 & 0,6324 & 0,3162 & 0,6324 \\ 0,6324 & 1,2647 & 0,6324 & 0,3162 \\ 0,3162 & 0,6324 & 1,2647 & 0,6324 \\ 0,6324 & 0,3162 & 0,6324 & 1,2647 \end{bmatrix}$$

Sedangkan nilai $[K^{(e)}]$ setiap elemen berbeda-beda. Hal ini disebabkan karena adanya konveksi yang masuk pada elemen-elemen tertentu. Nilai $[K^{(e)}]$ pada kondisi ini terdiri dari $[K_D^{(e)}]$ dan $[K_M^{(e)}]$.

Nilai $[K_D^{(e)}]$ merupakan $[K^{(e)}]$ untuk setiap elemen yang tidak terkena konveksi dan bernilai yang sama, yaitu

$$[K_D^{(e)}] = \begin{bmatrix} 45.0000 & -31.5000 & -22.5000 & 9.0000 \\ -31.5000 & 45.0000 & 9.0000 & -22.5000 \\ -22.5000 & 9.0000 & 45.0000 & -31.5000 \\ 9.0000 & -22.5000 & -31.5000 & 45.0000 \end{bmatrix}$$

Nilai $[K_M^{(e)}]$ juga bernilai sama untuk setiap elemen yang dikenai konveksi. Elemen-elemen yang terkena konveksi adalah elemen 5-8, 13-16, 21-24 dan 29-32. Sehingga diperoleh,

$$[K_M^{(e)}] = \begin{bmatrix} 2.5000 & 0.4167 & 0 & 0.8333 \\ 0.4167 & 2.5000 & 0.8333 & 0 \\ 0 & 0.8333 & 2.5000 & 0.4167 \\ 0.8333 & 0 & 0.4167 & 2.5000 \end{bmatrix}$$

Setelah nilai $[K_M^{(e)}]$ diketahui, maka nilai $[K^{(e)}]$ untuk setiap elemen yang terkena konveksi yaitu

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 47.5000 & -31.5000 & -22.5000 & 9.0000 \\ -31.5000 & 47.5000 & 9.0000 & -22.5000 \\ -22.5000 & 9.0000 & 47.5000 & -31.5000 \\ 9.0000 & -22.5000 & -31.5000 & 47.5000 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f^{(e)}\}$ untuk tiap elemen berbeda-beda, hal ini disebabkan karena adanya pengaruh konveksi serta *flux* yang masuk.

$$\{f_Q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f_Q^{(e)}\}$ untuk setiap elemen bernilai 0 karena tidak ada energi dalam yang masuk.

$$\{f_h^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai $\{f_h^{(e)}\}$ untuk setiap elemen bernilai 0 karena $T_\infty = 0$. Sedangkan untuk elemen-elemen yang dikenai *flux*, yaitu elemen 33-36, 41-44, 49-52 dan 57-60 memiliki nilai

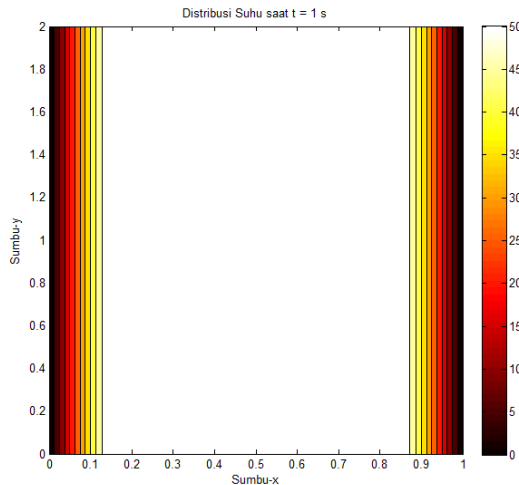
$$\{f_q^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 3.7500 \\ 3.7500 \\ 5.6250 \\ 5.6250 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks kekakuan lokal untuk setiap elemen maka dengan perhitungan MATLAB diperoleh matriks kekakuan global untuk $[K]$, $[K_G]$ dan $\{f\}$. Kemudian

matriks kekuan global tersebut akan disubstitusikan pada Persamaan (4.37).

Ketiga pelat dengan diskritisasi yang berbeda tersebut kemudian disimulasikan pada saat $t = 1\text{ s}$, 600 s dan 1.800 s yang selanjutnya akan dianalisis untuk mengetahui bagaimana distribusi suhu yang terjadi jika ada konveksi dan *flux* masuk ke dalam pelat.

1. Saat $t = 1\text{ s}$



Gambar 4.12. Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1\text{ s}$

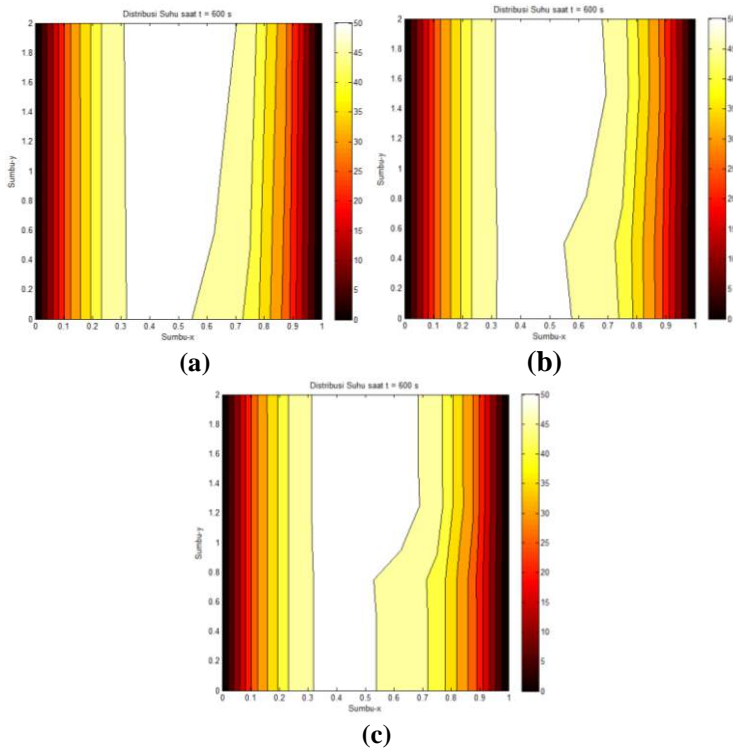
Kondisi awal untuk semua permukaan pelat dengan diskritisasi yang berbeda pada saat $t = 1\text{ s}$ ditampilkan oleh Gambar 4.12. *Inputan* nilai awal untuk suhu pada pelat diambil dari tabel pada Lampiran B dimana suhu pada *node* 10-18 menggantikan suhu pada *node* 1-9, juga menggantikan suhu pada *node* 10-18 dan seterusnya.

Sisi kanan dan sisi kiri pada permukaan pelat dipertahankan konstan $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada kondisi ini belum terjadi

perambatan panas pada pelat. Secara numerik, distribusi suhu pada pelat untuk masing-masing diskritisasi akan ditampilkan pada Lampiran C.

2. Saat $t = 600$ s

Gambar 4.13 menunjukkan kondisi permukaan pelat saat $t = 600$ s untuk semua model diskritisasi pada pelat.



Gambar 4.13. Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600$ s untuk (a) 16 elemen ,(b) 32 elemen dan (c) 64 elemen

Secara umum, semua pelat mengalami perubahan kontur yaitu sisi kiri dan kanan bergerak menuju tengah pelat. Hal ini

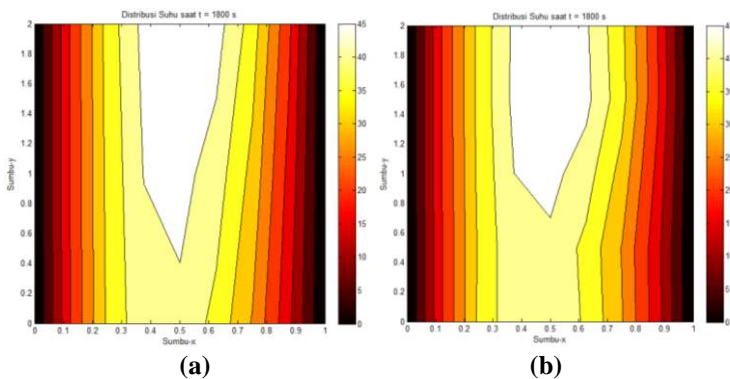
dapat diamati dari perubahan jarak sumbu x pada gambar. Namun kontur pada sisi kanan bagian bawah bergerak lebih lebar ke tengah hingga mencapai hampir setengah dari panjang pelat pada sumbu x . Ini disebabkan karena konveksi yang masuk pada sisi kanan bawah permukaan pelat sudah merambat hingga seperempat bagian pelat dan menyebabkan distribusi suhu pada bagian tersebut lebih rendah dibandingkan lainnya.

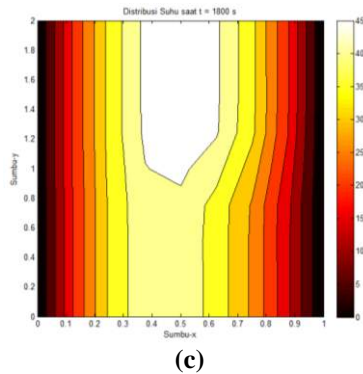
Sedangkan *flux* yang masuk pada sisi atas pelat menyebabkan rambatan konveksi berjalan lambat sehingga perubahan kontur yang terjadi tidak sama. Secara numerik, distribusi suhu pada pelat untuk masing-masing diskritisasi akan ditampilkan pada Lampiran D.

Dilihat dari sisi simulasi, semakin banyak diskritisasi elemen yang digunakan maka semakin halus kontur yang dihasilkan. Hal ini dapat diamati dari perbedaan kontur pada ketiga gambar. Kondisi ini menunjukkan bahwa semakin banyak elemen yang digunakan, distribusi suhu pada pelat akan semakin mendekati suhu sebenarnya.

3. Saat $t = 1.800\text{ s}$

Gambar 4.14 menunjukkan kondisi permukaan pelat saat $t = 1.800\text{ s}$ untuk semua model diskritisasi pada pelat.





Gambar 4.14. Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1.800$ s untuk (a) 16 elemen ,(b) 32 elemen dan (c) 64 elemen

Secara umum, semua pelat mengalami perubahan kontur lebih banyak dibandingkan sebelumnya. Konveksi yang merambat hampir memenuhi permukaan pelat. Hal ini dapat diamati dari perubahan warna kontur yang berbeda pada Gambar 4.14 jika dibandingkan dengan Gambar 4.13.

Sedangkan warna putih pada kontur menunjukkan bahwa *flux* yang masuk pada sisi atas pelat menyebabkan rambatan konveksi berjalan lambat. Sehingga pada bagian tersebut distribusi suhunya lebih tinggi dibandingkan lainnya. Secara numerik, distribusi suhu pada pelat untuk masing-masing diskritisasi akan ditampilkan pada Lampiran E.

Dilihat dari sisi simulasi, semakin banyak diskritisasi elemen yang digunakan maka semakin halus kontur yang dihasilkan. Hal ini dapat diamati dari perbedaan kontur pada ketiga gambar. Kondisi ini menunjukkan bahwa semakin banyak elemen yang digunakan, distribusi suhu pada pelat akan semakin mendekati suhu sebenarnya.

BAB V

PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisa dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa :

1. Secara numerik hasil distribusi suhu dari lapisan tengah pelat dipengaruhi oleh banyaknya elemen yang digunakan. Semakin banyak elemen yang digunakan maka distribusi suhu yang dihasilkan akan semakin akurat meskipun perubahan numeriknya tidak terlalu signifikan. Hal ini dapat diamati dari perubahan suhu pada *node-node* yang bersesuaian.
2. Banyaknya elemen yang digunakan juga berpengaruh pada simulasi. Semakin banyak elemen yang digunakan maka kontur yang dihasilkan akan semakin halus atau perpindahan panas semakin terlihat untuk tiap *node* meskipun waktu yang dibutuhkan untuk simulasi akan menjadi lebih lama.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah

1. Dikembangkan dengan analisa *stress* (tegangan) dan analisa *displacement* (perpindahan) untuk mengetahui kekuatan bahan yang digunakan.
2. Dikembangkan dengan bentuk dan material bahan pelat yang bervariasi.

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Incropera, F.P., DeWitt, D.P. 1990. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 3th ed.** New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [2] Kosasih, P.B. 2012. **Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga.** Yogyakarta: ANDI OFFSET.
- [3] Jeffers, A.E. **Heat Transfer Element for Modelling The Thermal Response of Non-Uniformly Heated Plates.** Scientific Research: Finite Elements in Analysis and Design, 2013, 63, 62-68.
- [4] Segerlind, L.J. 1984. **Applied Finite Element Analysis, 2th ed.** Canada: John Wiley and Sons, Inc.
- [5] Susatio, Y. 2004. **Dasar-Dasar Metode Elemen Hingga.** Yogyakarta : ANDI OFFSET.

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

LAMPIRAN A
Tabel Distribusi Suhu pada Sisi Depan Pelat saat $t = 10 \text{ s}$

Node	Suhu (°C)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	83,9121
12	85,3838
13	84,9993
14	85,1214
15	84,9993
16	85,3838
17	83,9121
18	0
19	0
20	100
21	100
22	100
23	100
24	100
25	100
26	100
27	0

LAMPIRAN B
Tabel Distribusi Suhu pada Sisi Depan Pelat saat $t = 37 \text{ s}$

Node	Suhu (°C)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	49,6750
12	53,0090
13	52,2628
14	52,4588
15	52,2628
16	53,0090
17	49,6750
18	0
19	0
20	100
21	100
22	100
23	100
24	100
25	100
26	100
27	0

LAMPIRAN C
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1 \text{ s}$
(16 Elemen 27 Node)

Node	Suhu (°C)
1	0
2	49,6750
3	53,0090
4	52,2628
5	52,4588
6	52,2628
7	53,0090
8	49,6750
9	0
10	0
11	49,6750
12	53,0090
13	52,2628
14	52,4588
15	52,2628
16	53,0090
17	49,6750
18	0
19	0
20	49,6750
21	53,0090
22	52,2628
23	52,4588
24	52,2628
25	53,0090
26	49,6750
27	0

LAMPIRAN C (LANJUTAN)
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1 \text{ s}$
(32 Elemen 45 Node)

Node	Suhu (°C)	Node	Suhu (°C)
1	0	25	53,0090
2	49,6750	26	49,6750
3	53,0090	27	0
4	52,2628	28	0
5	52,4588	29	49,6750
6	52,2628	30	53,0090
7	53,0090	31	52,2628
8	49,6750	32	52,4588
9	0	33	52,2628
10	0	34	53,0090
11	49,6750	35	49,6750
12	53,0090	36	0
13	52,2628	37	0
14	52,4588	38	49,6750
15	52,2628	39	53,0090
16	53,0090	40	52,2628
17	49,6750	41	52,4588
18	0	42	52,2628
19	0	43	53,0090
20	49,6750	44	49,6750
21	53,0090	45	0
22	52,2628		
23	52,4588		
24	52,2628		

LAMPIRAN C (LANJUTAN)

**Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1 \text{ s}$
(64 Elemen 81 Node)**

Node	Suhu	Node	Suhu	Node	Suhu
1	0	28	0	55	0
2	49,6750	29	49,6750	56	49,6750
3	53,0090	30	53,0090	57	53,0090
4	52,2628	31	52,2628	58	52,2628
5	52,4588	32	52,4588	59	52,4588
6	52,2628	33	52,2628	60	52,2628
7	53,0090	34	53,0090	61	53,0090
8	49,6750	35	49,6750	62	49,6750
9	0	36	0	63	0
10	0	37	0	64	0
11	49,6750	38	49,6750	65	49,6750
12	53,0090	39	53,0090	66	53,0090
13	52,2628	40	52,2628	67	52,2628
14	52,4588	41	52,4588	68	52,4588
15	52,2628	42	52,2628	69	52,2628
16	53,0090	43	53,0090	70	53,0090
17	49,6750	44	49,6750	71	49,6750
18	0	45	0	72	0
19	0	46	0	73	0
20	49,6750	47	49,6750	74	49,6750
21	53,0090	48	53,0090	75	53,0090
22	52,2628	49	52,2628	76	52,2628
23	52,4588	50	52,4588	77	52,4588
24	52,2628	51	52,2628	78	52,2628
25	53,0090	52	53,0090	79	53,0090
26	49,6750	53	49,6750	80	49,6750
27	0	54	0	81	0

LAMPIRAN D
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600\text{ s}$
(16 Elemen 27 Node)

Node	Suhu (°C)
1	0
2	30,3817
3	47,5220
4	52,0176
5	50,7552
6	48,7951
7	44,0024
8	28,0600
9	0
10	0
11	30,4231
12	47,5668
13	52,2199
14	51,9010
15	50,8566
16	46,0743
17	29,4297
18	0
19	0
20	30,4890
21	47,6398
22	52,4491
23	53,0845
24	52,9926
25	48,2233
26	30,8519
27	0

LAMPIRAN D (LANJUTAN)

**Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600\text{ s}$
(32 Elemen 45 Node)**

Node	Suhu (°C)	Node	Suhu (°C)
1	0	25	45,9223
2	30,3988	26	29,3328
3	47,5406	27	0
4	52,0700	28	0
5	51,0412	29	30,4747
6	49,3099	30	47,6235
7	44,5240	31	52,4067
8	28,4112	32	52,9032
9	0	33	52,6719
10	0	34	47,8969
11	30,3885	35	30,6348
12	47,5303	36	0
13	52,0280	37	0
14	50,7628	38	30,4766
15	48,8051	39	47,6274
16	44,0254	40	52,3777
17	28,0831	41	52,6230
18	0	42	52,1425
19	0	43	47,3716
20	30,4255	44	30,2889
21	47,5699	45	0
22	52,2105		
23	51,8173		
24	50,7012		

LAMPIRAN D (LANJUTAN)**Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 600$ s
(64 Elemen 81 Node)**

Node	Suhu	Node	Suhu	Node	Suhu
1	0	28	0	55	0
2	30,3966	29	30,3925	56	30,4755
3	47,5398	30	47,5365	57	47,6259
4	52,0114	31	52,0067	58	52,3890
5	50,6274	32	50,5191	59	52,7002
6	48,5614	33	48,3554	60	52,2852
7	43,7932	34	43,6013	61	47,5170
8	27,9423	35	27,8171	62	30,3847
9	0	36	0	63	0
10	0	37	0	64	0
11	30,3966	38	30,4255	65	30,4735
12	47,5398	39	47,5708	66	47,6238
13	52,0140	40	52,1870	67	52,3808
14	50,6310	41	51,6490	68	52,7022
15	48,5661	42	50,3944	69	52,2970
16	43,7999	43	45,6230	70	47,5222
17	27,9467	44	29,1418	71	30,3880
18	0	45	0	72	0
19	0	46	0	73	0
20	30,3972	47	30,4827	74	30,4977
21	47,5400	48	47,6318	75	47,6506
22	52,0083	49	52,3928	76	52,4088
23	50,6340	50	52,8204	77	52,7192
24	48,5767	51	52,5191	78	52,3032
25	43,8042	52	47,7322	79	47,5291
26	27,9494	53	30,5251	80	30,3925
27	0	54	0	81	0

LAMPIRAN E
Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1.800\text{ s}$
(16 Elemen 27 Node)

Node	Suhu (°C)
1	0
2	20,2426
3	35,7376
4	43,7983
5	43,8017
6	38,4835
7	29,6066
8	16,3834
9	0
10	0
11	20,4148
12	36,2251
13	45,0822
14	46,7714
15	42,7027
16	33,4649
17	18,6620
18	0
19	0
20	20,6360
21	36,7875
22	46,4814
23	49,9834
24	47,3275
25	37,7209
26	21,1823
27	0

LAMPIRAN E (LANJUTAN)**Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1.800\text{ s}$
(32 Elemen 45 Node)**

Node	Suhu (°C)	Node	Suhu (°C)
1	0	25	33,1764
2	20,2838	26	18,4924
3	35,8265	27	0
4	44,0132	28	0
5	44,3523	29	20,5844
6	39,2887	30	36,6576
7	30,3311	31	46,1750
8	16,8078	32	49,3447
9	0	33	46,4333
10	0	34	36,8880
11	20,2667	35	20,6851
12	35,7897	36	0
13	43,8985	37	0
14	43,9624	38	20,5912
15	38,6891	39	36,6523
16	29,8067	40	46,0854
17	16,5070	41	48,9436
18	0	42	45,7777
19	0	43	36,3050
20	20,4132	44	20,3488
21	36,2037	45	0
22	45,0001		
23	46,5569		
24	42,3874		

LAMPIRAN E (LANJUTAN)**Tabel Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat $t = 1.800$ s
(64 Elemen 81 Node)**

Node	Suhu	Node	Suhu	Node	Suhu
1	0	28	0	55	0
2	20,2579	29	20,2768	56	20,5890
3	35,7184	30	35,7906	57	36,6537
4	43,6643	31	43,8339	58	46,1151
5	43,4571	32	43,6539	59	49,0597
6	37,9950	33	38,1974	60	45,9642
7	29,1660	34	29,3857	61	36,4742
8	16,1280	35	16,2698	62	20,4463
9	0	36	0	63	0
10	0	37	0	64	0
11	20,2571	38	20,4053	65	20,5892
12	35,7160	39	36,1567	66	36,6499
13	43,6618	40	44,8363	67	46,0901
14	43,4530	41	46,1417	68	49,0194
15	37,9899	42	41,7842	69	45,9127
16	29,1624	43	32,6274	70	36,4170
17	16,1254	44	18,1702	71	20,4111
18	0	45	0	72	0
19	0	46	0	73	0
20	20,2558	47	20,5661	74	20,6205
21	35,7084	48	36,5649	75	36,6862
22	43,6347	49	45,8993	76	46,1241
23	43,4150	50	48,7826	77	49,0357
24	37,9457	51	45,6531	78	45,9116
25	29,1144	52	36,1409	79	36,4136
26	16,0962	53	20,2337	80	20,4081
27	0	54	0	81	0

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Vimala Rachmawati. Dilahirkan di Surabaya pada tanggal 28 Juli 1993 dan merupakan anak pertama dari 4 bersaudara. Pendidikan formal yang telah ditempuh yaitu SDN Sidotopo Wetan 3 No. 257, SMPN 1 Surabaya. Setelah menyelesaikan pendidikannya di SMAN 2 Surabaya, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2011.

Pada masa perkuliahan penulis memilih Matematika Terapan sebagai bidang keahliannya.

Selama menjadi mahasiswa ITS, penulis aktif mengikuti organisasi intra kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Matematika sebagai *staff* Departemen Dalam Negeri (Dagri) pada periode 2012-2014. Penulis juga diamanahi sebagai Sekretaris Umum periode 2012-2013 dan Wakil Ketua periode 2013-2014 pada organisasi UKM Pramuka ITS .

Selama penulisan Tugas Akhir ini, penulis tidak lepas dari kekurangan. Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke vimalarachmawati@gmail.com.